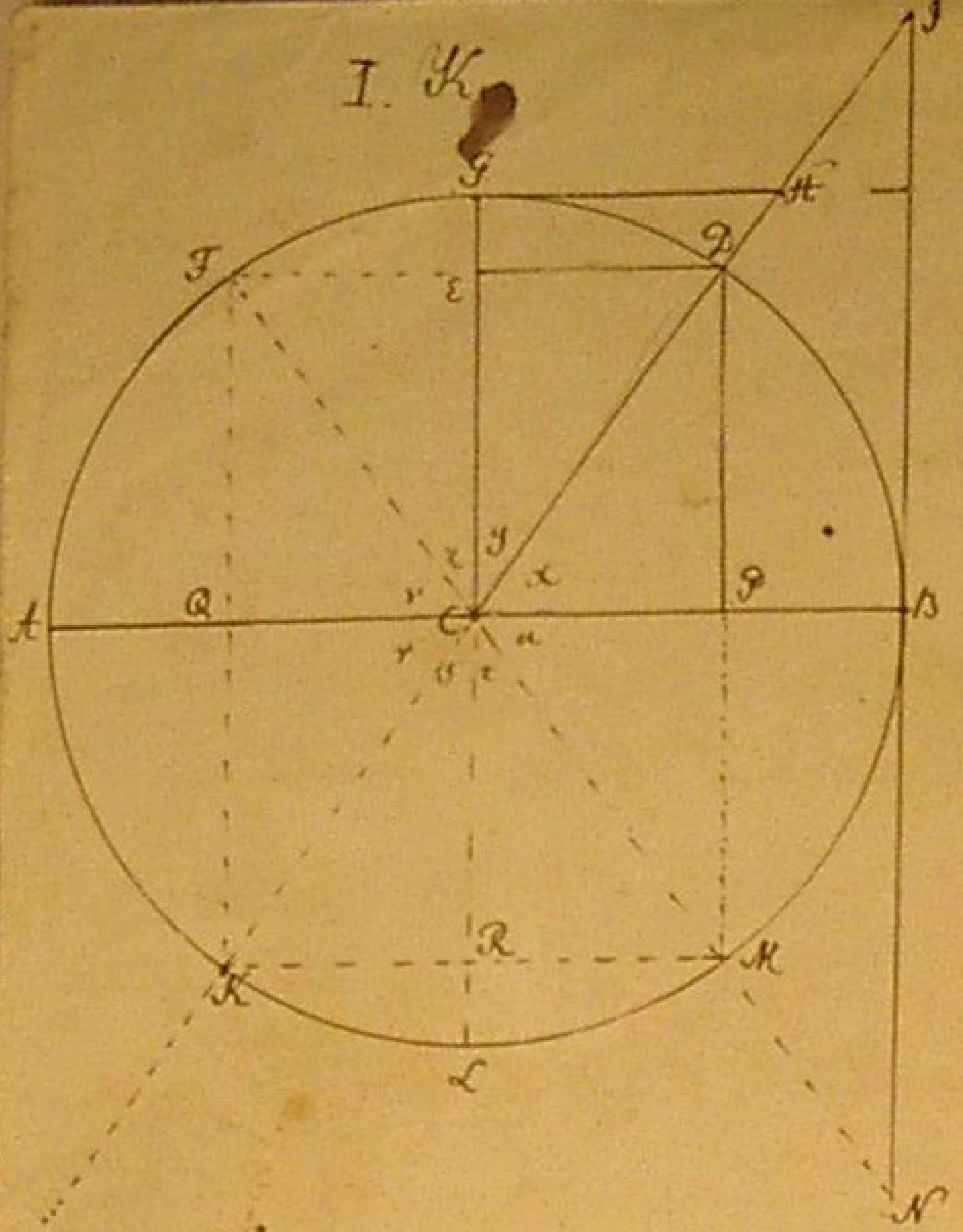
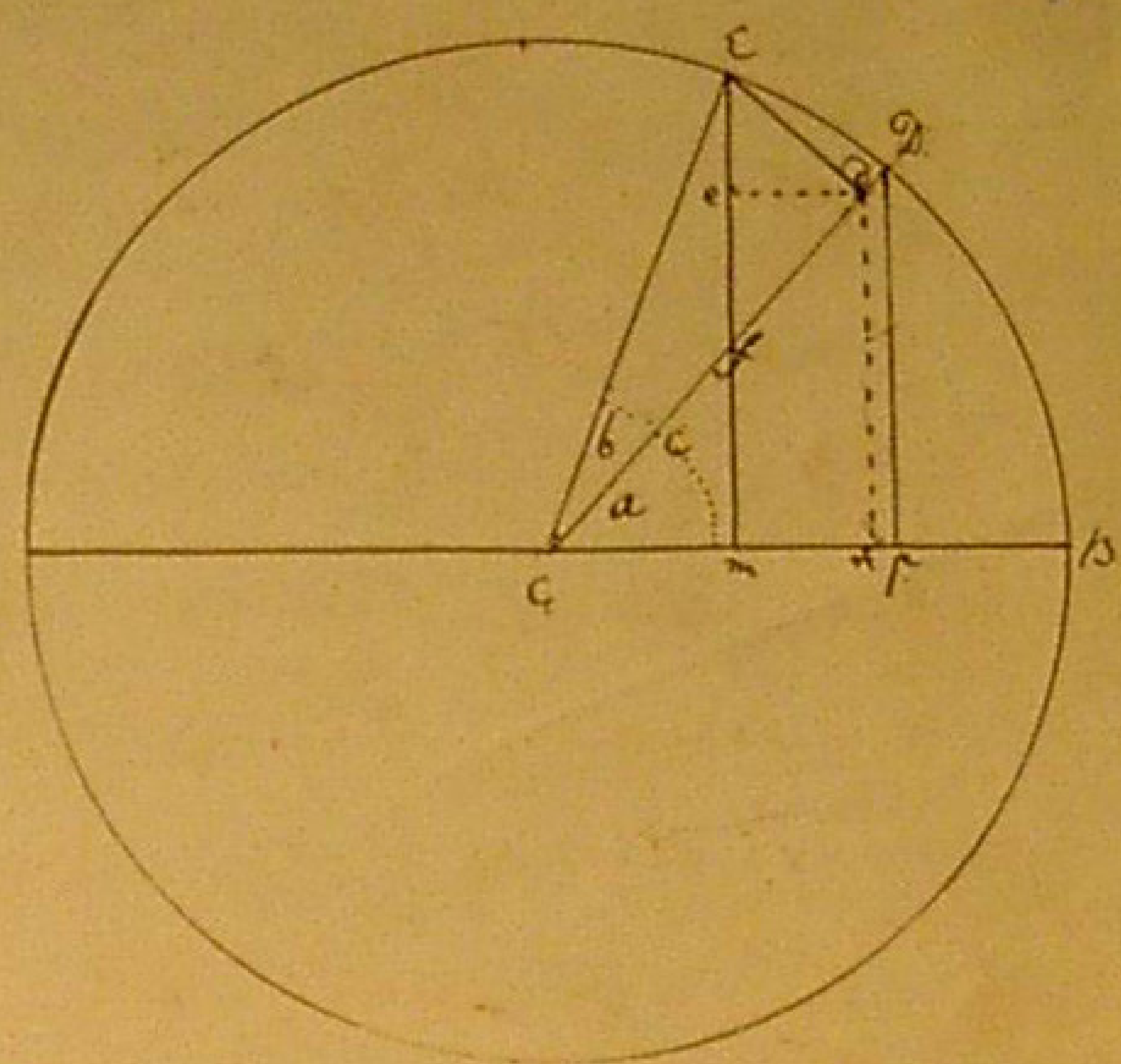
I. K.



II. K.



Azok a miket mi másutt, mindennemű görbéknél eltávnak (abscissa) és feltávnak (ordinata) neveztünk, különösen körnél, más sajátné-vel is viselnek; s neveztetik a feltáv Sinusnak, az eltáv Co-Sinusnak, kőrontól mindig a középpontot téve, s a + s – előjegyzetek, vagyis egyenként szerint általánosan. pl. AGBL körben D pontnak Sinusa = + PD = + CE, cosinusa = + ED = + CP; F pontnak Sinusa = + QF = + CE, Cosinusa = – EF = – CQ; M pontnak Sinusa = – PM = – CR, Cosinusa = + RM = + CP satb.

De itt, t.i. a körnél ezen elnevezéseknek, még több mindkét kiterjesztett értelmei is vannak a következők t.i.

a) A kerület akármely pl. D, vagy G, vagy F, vagy A vagy K vagy L, vagy M pontjának Sinusa s Cosinusa, mondatnak azon szög Sinusának s Cosinusának is, melynek szögpontja a középpont, jobb (AB) szára CB, az tehát eltávegyenes + felé fele, bal szára pedig az illető ponton át a középpontból vont egyenes pl.

pl. DD és CP sinusa és cosinusa x szögnek, + 2F és − CQ sinusa és cosinusa $BCFA = (x+y+z)$ szögnek; − 2K és − CQ sinusa és cosinusa $BCKA = (x+y+z+v+r)$ hátrahajtott szögnek, vagyis − DM és + CP sinusa és cosinusa $BCM = (x+y+z+v+r+s+t)$ még hátrahajtottabb szögnek —. De miután a szögöktől, a hátrahajtottakat is odaértve, 360°-on túl felül világos fogalmat alkotni bajos . . mert

b) Még sokkal szorosabb értelmet a legfontosabb műszavaknak abban áll hogy akármely a kerületbeli D, C, F, A, K, L, M sat. pontnak sinusa és ~~cosinusát~~, mondják azon ív sinusának és cosinusának is, melynek kezdő pontja B. t.i. a eltávozás egyenesben + azaz felé vont sugár végpontja, végső pontja pedig az illető kerületi pont. Ezen értelmezés következtében tehát, + DD és + CP sinusa és cosinusa BD ívnek; + 2F és − CQ sinusa és cosinusa $BF = (BD + DG + GF)$ ívnek; − DM és + CP sinusa és cosinusa BM, azaz (MB) $(BD + DS + SF + FA + AK + KL + LM)$ ívnek, és mivel a kör magába visszaható s tehát végtelen vonal, melyen folytonosan egy megkezdett irányban haladást akármeddig – s a már megjárt pontokon újra visszaeső ismételéssel is haladva, mindig folytatni lehet, látni való (összefüggésben meggyőzendő) az hogy ugyanazon sinus és cosinus, egyszersmind sinusa és cosinusa végtelen sok különböző ívnek, (ezt az ív nevezett azon általános értelemben véve hogy az indulási pontunktól ~~addig~~ meg állapodási pontunkig a kerületen bejárt egész utunkat, s tehát ennek hosszát jelenti, mindannyiszor és beleszámításával, melyeket talán kétszer háromszor százszor hajtva, előbbi nyomainkat ismételten tapodva járunk pl. BD ívnek sinusa s cosinusa ugyanaz mint (BD+DC+CF+ +FA+AK+KL+LM+MB+BD) ívé, — s ez egy igen tanulságos [illegible], s tulajdonképpen azt is teszi hogy mindazoknak végpontja a előbbivel közös mind D, s következőleg mindenikének sinusa s cosinusa ezen D-pont sinusa és cosinusa levén, egyenlők; s könnyű átlátni hogy x-el akármely ívet, sin x, cos x-el annak sinusát s cosinusát, jelelvén P-vel pedig egy egész kerületet jeleljen mindig lesz

a) — — $\sin x = \sin(x+P)$, sőt, $\sin x = \sin(x+kP)$. s [illegible]

b) — . . $\cos x = \cos(x+P)$ sőt, $\cos x = \cos(x+kP)$ . . .

Továbbá a leg egyszerűbb tulajdoni ezeknek igen is egyszerű átláthatók ezek is:

1) Csak 360°-nál nem nagyobb ívekről szólva

90°-nál kisebb íveknek sin. s cos + előjegyűek

90° ívnek sinusa = +r = sugár, cosinusa = 0

180° s 90° között íveknek sinusaik +, cosinusaik − előjegyűek

180° ívnek sinusa = 0, cosinusa = −r

180° s 270° között sinusok —, cosinusok is — előjegyűek

270° ívnek sinusa = −r cosinusa = 0

270° s 360° között a sinusok —, a cosinusok + előjegyűek; végre

$\sin 360° = \sin 0 = 0$, $\cos 360° = \cos 0 = +r$.

2) Akármely ívről szólva (~~[illegible]~~

~~[illegible] $\sin(\frac{P}{2}-x) = \sin(180° [illegible])$~~

$\sin(\frac{P}{2}-x) = \sin(180°-x) = \sin x$	$\cos(\frac{P}{2}-x) = \cos(180°-x) = -\cos x$
$\sin(\frac{P}{2}+x) = \sin(180°+x) = -\sin x$	$\cos(\frac{P}{2}+x) = \cos(180+x) = -\cos x$
~~$\sin(\frac{3P}{2}$ [illegible]~~	$\cos(P-x) = \cos(360-x) = \cos x$
$\sin(P-x) = \sin(360°-x) = -\sin x$	$\cos(P+x) = \cos(360+x) = \cos x$
$\sin(P+x) = \sin(360+x) = \sin x$	

Ha a ívet B-től kezdjük, de nem B-D-G... hanem B-M-L irányban vesszük, valamint amaz előbbi szerint +, úgy ebben – előjeggyel jelelhetjük. S különböztethetjük meg egy másiktól, s ezért is [illegible] való egy + vagy – előjegyű ívnek lehetnek közös végpontjai, lehet s lesz ugyanazon sinusok s cosinusok, s pl. ~~[illegible]~~ $\cos +x = \cos(-x)$. S általában lesz áll, hogy

$\sin x = -\sin(-x)$, $\cos x = \cos(-x)$.

Ami az ívek mértékét illeti, ez kétféle lehet.

a) Mérhetjük az ívet ívvel – pl. egy fokot $= \frac{P}{360}$ e, vagy $\frac{P}{4}$ et, vagy ezeknek különféle darabjait véve egységnek, s így [illegible] létünk [illegible]. De

b) Mérhetjük az ívet egyenessel is (tudniillik [illegible]) – s ezentúl ezt a mértéket használjuk; egységnek véve mindig a sugarat. Tehát $r=1$, s x is lesz az a szám, mely annak hosszát, a sugárral, mint egységgel mérve kifejezi. ~~[illegible]~~ Innen $360° = 2\pi$, $x = 30° = \frac{\pi}{6} =$ 0,5235987756... Ebben képezte a fentebbi formulákban P helyébe mindenütt 2π illik.

Végre sinusokat s cosinusokat illetőleg megjegyzünk még egy pár dolgot.

Azon ~~[illegible]~~ ~~[illegible] $= 30° = \frac{\pi}{6}$~~

Azon x s y ívek, melyeknek összege $= 90° = \frac{\pi}{2}$, mondatnak kiegészítőknek, s megfelelő szögeik kiegészítőknek pl. (coanguli = complementares anguli) pl. I. Képen x s y szögek BD s DC ívek; ~~[illegible]~~ (BD + DG + GF) ívnek kiegészítője – GF, sat. Ez mi megjegyzésünk ebből áll, hogy (minek [illegible] sága [illegible] egy [illegible]) hogy így x s y [illegible] illetőleg, (legyen az [illegible] közöl egyik [illegible]) mindig

$\sin x = \cos y$, s $\cos x = \sin y$. — vagy [illegible]

ki. [illegible] (szög) Cosinusa [illegible] (vagy szögnek) Sinusa.

§2.

Előfordulván számítások [illegible], a Sinus s Cosinus némely functióji, azon némely [illegible] alakú képletek saját nevekkel ruháztattak fel a tanítók; például

1) $\frac{\sin}{\cos}$ — neve tangens, vagy is $\frac{\sin x}{\cos x} = \tang x$

2) Ennek reciprocuma vagy is $\frac{\cos}{\sin}$ Cotangens vagy is $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

tehát $\tang x = \frac{1}{\cot x}$, vagy $\cot x = \frac{1}{\tang x}$.

3) A Cosinus reciprocuma Secans tehát $\frac{1}{\cos x} = \sec x$

4) A Sinus reciprocuma Cosecans, vagy is $\frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$

5) $1 - \cos$. neve Sinus versus, vagy is $1 - \cos x = \sin v.\, x$

6) $1 - \sin x$ neve Cosinus versus vagy is $1 - \sin x = \cos v.\, x$.

Ezen képleteket [illegible] hat, s tehát a Sinus s Cosinus [illegible] összesen nyolc trigonometriai functióknak nevezik, s mint [illegible] a Sinust s Cosinust [illegible], úgy a többit közöl is [illegible] vonalban s [illegible] ki a körnél [illegible]

u. m. ha (I. Kép.) BD ív = x

1. BI = tang x mert a illető Δk hasonlósága szerint fogvan

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{BI}{1} = BI = \tang x$$

tehát, sinussal kifejezve, a tangens nem egyéb, mint a +1 végén emelt függőleges a radiusra, mely B és a rom pont között foglaltatik, hol a középponttól x ív végpontján át vezetett egyenes vágja. —

Ezen értelmezést alkalmazva akármely nagyobb vagy egyéb ívre, pl. BT ívre, ennek tangense lesz BN egyenes, mely — előjegyű, s annak is kell lennie, mert a definitio szerint $\tang BT = \frac{\sin BT}{\cos BT}$, s mivel $\sin BT$ + előjegyű (= 2T)

$\cos BT$ — előjegyű (= −C2) tehát $\tang BT = \frac{+2T}{-C2} = -BN$.

Figyelmes utánanézés könnyen meggyőzend afelől, hogy a sinussal kifejezett, s a képletben adott értelmezések akármely ívekre nézve is tökéletes összhangzásban fognak lenni mind mértékre, mind előjegyekre illetőleg.

2) GH = cot x mert (mint feladva hogy CE = ID = sin x, s ED = CI = cos x)

$\cancel{\frac{\sin x}{\cos x}}$ $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{GH}{1} = \cot x$; miáltal egy szerint felelő ésszerű viszony (hasonlóan akármikor sinusnál s cosinusnál találtató volt). ~~és~~ cot x = tang y, s tang x = cot y. —

Lesz tehát a cotangens értelmezése sinussal a Cotangensnek nevezett a társív (vagy kiegészítő) tangense, — s ebből újra azt következtetni, hogy a Cotangens-képlet- s sinusban értelmezései is, minden lehető ívre illetőleg összhangzanak. —

3) $CI = \sec x$, mert

$\frac{1}{\cos x} = \frac{CI}{1} = CI = \sec x$. S ebből folyó második értelmezése.

Secansnak neveztetik a illető ív végpontjára a középpontból vonatott egyenesnek azon darabja, mely C középpont, s a B kezdő pontból CB-re emelt függő (= tang) között van foglaltatik be. —

Ez az értelmezés is minden esetben összhangzik $\frac{1}{\cos x}$-el. —

4) $CH = \operatorname{cosec} x$, mert

$\frac{1}{\sin x} = \frac{CH}{1} = CH = \operatorname{cosec} x$. S innét kitetszik, hogy cosecans nem egyéb, mint a társív (kieg) tangense secansa; tehát

$\sec x = \operatorname{cosec} y$, $\operatorname{cosec} x = \sec y$. — Ilyen áll a ... viszonyság

5) $DB = \operatorname{sinv} x$; mert $1 - \cos x = DB = \operatorname{sinv} x$. —

6) $EG = \operatorname{cosv} x$; mert $1 - \sin x = EG = \operatorname{cosv} x$. Ismét

$\operatorname{sinv} x = \operatorname{cosv} y$; $\operatorname{cosv} x = \operatorname{sinv} y$. —

S tehát általában: Minden ív co előrageszes functiója, nem egyéb mint társíve co előrag nélküli hasonnevű functiója.

Mily íveknek mely functiói legyenek + vagy − előjegyűek, azt magában a körben kirajzolt vonalak helyzetéből, azt a algebrai képletekben kifejezett értelmezésekben vizsgálat alapján tehető; mind azon által a secansokra, (S tehát a cosecansokra) is a + és − előjegyzés nem lehet a szerint értelmezéshez jobbra, vagy balra, le- vagy fel nyúlnak, ábrázoló vonalaik, mert így ugyanazon secans egyik helyzetében +

a másik tekintetben — előjegyű lehetne: pl. BDSF ívnek Secansa

CN egyenes melynek vége (ellenirány) [illegible] +, de felmásig — előjeggyel

irányzand. — Secansoknál tehát, (és Cosecansoknál) hogy a

őket illető előjegyek, az algebrai kiplus ~~[illegible]~~ értelmétől folyó eredmény-

gyel összehangzásban legyenek, a + és — jegyeket egészen más

sajátlagos értelemben vesszük, és +al jelöljük azt a Secans-

melynek a tangenssel származó vége, a középponttól az illető

ív végpontjához vont sugár további folytatásával esik; ellen-

ben az —al azt, melynek említett végpontja, az ív végpontjá-

tól a sugár középpont felé vont egyenes folytatásába esik.

más szókkal: + az, melynek végét a középponttól

távolodó irányban —, — melynek vége a középpont felé

közeledő irányban éri el, midőn a ív végpontjából Dolvas-

Pl. BD ív Secansa +CI, BDSFé —~~BN~~ CN, BDSFAKé —CI

Sz.

A vizsgálatok eredménye ez lesz.

I. A sarkpontoknál levő négy körnegyednek határpontjaiul (melyek B. S, A. L.)

	B	S	A	L nál
Sinus =	+0	+1	+0	−1
Cosinus =	+1	+0	−1	−0
Tangens =	+0	+∞	−0	−∞
Cotangens =	+∞	+0	+∞	−0
Secans =	+1	+∞	−1	−∞
Cosecans =	+∞	+1	−∞	−1
Sin Vers =	+0	+1	+2	+1
Cos V =	+1	+0	+1	+2

II. A sarkpontokon kívül

	Első negyedben	Második negyedben	Harmadik negyedben	Negyedik negyedben
Sinus	+	+	−	−
Cosinus	+	−	−	+
Tangens	+	−	+	−
Cotangens	+	−	+	−
Secans	+	−	−	+
Cosecans	+	+	−	−
Sin v	+	+	+	+
Cos v	+	+	+	+

§3.

Ezek a előjegyzések, s ezek a sarkpontoki functiojel állításai sokakat azokat mellőzve vagyunk is. Mi is akármely pontban (vagy ívre) nézve a kiható functiók egymástól függésü viszonyaiban jelen valóban kaptok, a következő egyenletek fejezik ki — elmellőzve még ezeket is ezeket nagy rendben s helyükön nem ideálban viszonyokat.

1. Minden ív v. szög sinusa s cosinusa, a középponttól az ív végén vont egyenesek egy derékszögű Δt formálnak, miből következik hogy . . . . . $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ . . . 1)

stehát $\sin x = \sqrt{1-\cos x^2}$ . . . 2)

$\cos x = \sqrt{1-\sin x^2}$ . . . 3)

2. Hogy két ív összegének vagy különbségének sinusát s cosinusát, megadva azon ívek sinusaival s cosinusaival kifejezzük, arra a következő észrevételek vezetnek

melyekben initiator… a II. Kép tartozik.

Legyen BD ív = x, $DE = y$, tehát $BE = x+y$ lesz.

$Dp = \sin x$; $Ed = \sin y$; $Em = \sin(x+y)$

$Cp = \cos x$, $Cd = \cos y$; $Cm = \cos(x+y)$ — továbbá D-ből függőleg bocsátván Dn és Do-t

a Hasonló Δk hasonlóságait

$$\frac{em = Dn}{Dp} = \frac{Cd}{1}, \text{ vagy is } em = Cd \cdot Dp$$

$$\frac{Ee}{Ed} = \frac{Cp}{1} \text{ vagyis } Ee = Cp \cdot Ed$$, tehát összeadván

$$Ee + em = Em = Dp \cdot Cd + Ed \cdot Cp \text{ — azaz}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cos x \quad \ldots \quad 4)$$

Viszont

$$\frac{Cn}{Cp} = \frac{Cd}{1}; \text{ vagy is } Cn = Cp \cdot Cd$$

$$\frac{mn = ed}{Ed} = \frac{Dp}{1} \text{ vagyis } mn = Dp \cdot Ed.$$ s kivonván

$$Cn - mn = Cm = Cp \cdot Cd - Dp \cdot Ed \text{ azaz:}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad \ldots \quad 5)$$

Ezen két utóbbi egyenletekben ha vesszük $(x+y) = z$

Tehát $y = y$, $x = z - y$; s tehát lészen

$\sin z = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ vagy

$\sin y \cdot \cos x = \sin z - \sin x \cdot \cos y$ … a) s hasonlag

$\cos z = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ vagy

$\cos x \cdot \cos y = \cos z + \sin x \cdot \sin y$ … b) s most a)-t osztva b)-vel

$$\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin z - \sin x.\cos y}{\cos z + \sin x.\sin y}$$ s ebből $\sin x$ kifejezvén

$$\sin y.\cos z + \sin x.\sin y^2 = \sin z\cos y - \sin x\cos y^2$$

$$\sin x\sin y^2 + \sin x\cos y^2 = \sin z.\cos y - \sin y.\cos z$$

$$\sin x = \frac{\sin z\cos y - \sin y\cos z}{\sin y^2 + \cos y^2} = \sin z.\cos y - \sin y\cos z$$

végre x-nek becsét helyettesítvén

$$\sin(z-y) = \sin z\cos y - \sin y\cos z \;\ldots\; 6$$

Továbbá ~~vagy~~ a)-t és b)-t másként írva

$$\sin x\cos y = \sin z - \sin y\cos x$$

$$\sin x\sin y = \cos x\cos y - \cos z$$ felírt alakjával osztva

$$\frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin z - \sin y\cos x}{\cos x\cos y - \cos z}$$, s ebből

~~$\cos x\cos y^2 = \sin z\sin y$~~

$$\cos x.\cos y^2 - \cos z\cos y = \sin y\sin z - \sin y^2\cos x$$, ebből

$$\cos x.\cos y^2 + \cos x\sin y^2 = \cos z\cos y + \sin z.\sin y$$ ebből

$$\cos x = \frac{\cos z.\cos y + \sin z.\sin y}{\sin y^2 + \cos y^2} = \frac{\cos z.\cos y + \sin z.\sin y}{1} =$$

s x-nek becsét helyettesítvén

$$\cos(z-y) = \cos z.\cos y + \sin z.\sin y \;\ldots\; 7)$$

Egyébaránt könnyű átlátni, hogy ezen utóbbi alakok kiírása el is maradhatott volna, ha előbbiekben jelentjük, hogy itt y helyett −y áll, s tehát $\sin -y = \sin y$, ellenben $\cos(-y) = -\cos y$, ezeket azon kifejezésekben így helyettesítjük. — Mindenesetre tehát ki is osztandó vagy különbségnek Sinusai és Cosinusai a következendők kit egyenletben vaskimerítőleg kifejtetve, melyek a ... meg először teljesleg kifejezhetők

$$\sin(x \pm y) = \sin x . \cos y \pm \sin y \cos x \quad \ldots 8)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x . \cos y \mp \sin x . \sin y \quad \ldots 9)$$

Tangensekről is hasonló formulát adni, a főméltóbb...

... könnyű levezetni.

$$\mathrm{Tang}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y . \cos x}{\cos x . \cos y - \sin x . \sin y};$$

osztva ... első tagjával felül s alul.

$$\mathrm{Tang}(x+y) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y} \quad \ldots 10).$$

vagy még általánosabban

$$\mathrm{Tang}(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x . \tan y} \quad \ldots 11.)$$

§ 4.

A sinus - cosinus - s tangensek összetételi formuláiból - ... többszöröseik kifejezései könnyen átmenetek. -

De mi tekintsük ... s legszebben ... többszöröseit - s ... (...) ... egy páratlan többszörösét: ... $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$ ... ? - (...)

... hogy

a) $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x \quad 12)$

b) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x^2 - \sin x^2$ . . . . . (13)

c) vagy $\cos x^2$ helyébe $1-\sin x^2$ téve $\cos 2x = 1 - 2(\sin x^2)$ . . (14)

d) vagy megfordítva $\sin x^2$ helyett $1-\cos x^2$, $\cos 2x = 2\cos x^2 - 1$ . . (15)

S most térjünk vissza a fölvett kérdéshez.

a) $\sin nx = \sin nx$

b) $\sin(n-2)x = \sin(nx-2x) = \sin nx \cos 2x - \sin 2x \cos nx$

c) $\sin(n-4)x = \sin((n-2)x - 2x) = (\sin nx \cos 2x - \sin 2x . \cos nx)\cos 2x -$

$- \sin 2x \cos(n-2)x$

vagy, mivel $\cos(n-2)x = \cos(nx - 2x) = \cos nx \cos 2x + \sin nx . \sin 2x$

d) $\sin(n-4)x = \sin nx . \cos 2x . \cos 2x - \sin 2x . \cos nx . \cos 2x -$

$- \sin 2x . \cos nx . \cos 2x - \sin 2x . \sin 2x \sin nx$

$= \sin nx . \cos 2x . \cos 2x - 2 . \sin 2x . \cos nx . \cos 2x - \sin 2x . \sin 2x . \sin nx$

a+c) $\sin nx + \sin(n-4)x = \sin nx \cos 2x^2 - 2 \sin 2x \cos nx . \cos 2x + \sin nx -$

$- \sin 2x^2 . \sin nx$

$= \sin nx . \cos 2x^2 - 2 \sin 2x \cos nx . \cos 2x + \sin nx (1 - \sin 2x^2) =$

$= \sin nx . \cos 2x^2 - 2 . \sin 2x . \cos nx . \cos 2x + \sin nx . \cos 2x^2$

$= 2 \sin nx \cos 2x^2 - 2 . \sin 2x . \cos nx . \cos 2x$ =

$= 2\cos 2x (\sin nx \cos 2x - \sin 2x . \cos nx)$ =

$= 2 . \cos 2x . \sin(n-2)x$. s végre 14)-ből helyettesítve

$\sin nx + \sin(n-4)x = 2 . \sin(n-2)x - 4 \sin(n-2)x . \sin x^2$ s ebből

$\sin nx = 2 . \sin(n-2)x - 4 . \sin(n-2)x . \sin x^2 - \sin(n-4)x$ . . 16.

Akármely számot legyen tehát n, annak sinusát kitudjuk fejezni ha megelőző második s negyedik sinustudjuknak sinusa 8

tudatnak, mit hogy ha n-et meg egy páratlan számot tetszik értenünk, egyes kifejezhetünk ki x akármely páratlan száma többeseinek sinusa tudva van ha a két közvetlenül, meg előző két sőd páratlan számokon többeseié tudatatok — s ~~Tudjuk~~ pedig meg-fejtve, ha két x szög sinus páratlan szám többeseinek sinusa tudva van, abból folyik, minden következő páratlan szám többesének sinusainak is kifejezhetések rendre rendre. — Tudjuk pedig akármely szög +1 s −1 többesének sinusait melyek $+\sin x$ s $-\sin x$ tehát ezekből a 16) szerint kijönnek a következők:

Ha n tehát

$$
\begin{array}{lll}
-1 ; & \sin -x = -\sin x & = -1 \sin x \\
+1 & \sin x = +\sin x & = 1 \sin x \\
+3 & \sin 3x = 2(\sin x) - 4.\sin x(\sin x^2 + \sin x = & 3 \sin x - 4 \sin x^3 \\
+5 & \sin 5x = 2(\sin 3x) - 4.\sin 3x . \sin x^2 - \sin x & = 5 \sin x - 20 \sin x^3 + 16 \sin x
\end{array}
$$

vagy ezen lajstromot még tovább folytatva

$$\sin 7x = 7 \sin x - 56 \sin x^3 + 112 \sin x^5 - 64 x^7$$
$$\sin 9x = 9 \sin x - 120 \sin x^3 + 432 \sin x^5 - 560 x^7 + 256 x^9$$
$$\sin 11 x = 11 \sin x - 220 \sin x^3 + 1232 \sin x^5 - 2784 x^7 + 2752 x^9 - 1024 \sin x^{11}$$

s a t.

Ha ezen sorokat, rendre rendre - egymásból, jelesen minden következőnek a két megelőzőből alakulásának törvényét, vizsgál tat elő veendők – könnyen átlátható hogy

1) Minden új sorban

a) az egyes tagok egymást követő sin x-nek kettővel nagyobb elemeit foglalják magokban mint a megelőző sor sorbeli tag.

b) a tagok száma minden sorban eggyel több mint a megelőző sorban

c) az előjegyek minden sorban + és – közt tagonként váltogatók. Végre

d) a mi a számszorzókat illeti, ezek közül minden tagé úgy jön ki ha, a szorzód felső sorbeli közvetlen felette álló tagját kiteszi, azt ugyanazon sorban megelőzőt négyszer veszi, ezeknek összegekből a felette második szorzótag számszorzóját kivonjuk.

Ezen szabályok szemelőtt tartásával tehát, az x alábbi többeseinek sinját magának x-nek sinusával számolás által annak erelésével kifejezhetjük, de egyenesen rendre pl. ha sin 100x volna kifejezendő, akkor az előbb 99 megelőző többesek sinusának kifejezése nagyon – mi tűrhetlen hosszadalmasság volna. – Keressük tehát azt a mely sin nx (n-et egészen pártalan [illegible] törve hogy párosban) kifejezésének általános képét – s ez majd a mi egyes tesen [illegible] kifejezés általános tagképét. – Ezt végre

[illegible] hanem előbb vegyük mikép – az első többeseknek pl. sin x, sin 3x, sin 5x – sat. kifejezései illik az [illegible] ez az alak.

$$\sin nx = \frac{n \sin x}{1} - \frac{n.n^2-1^2}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{n.n^2-1^2.n^2-3^2}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - \ldots \ldots 17)$$

mert így

$$\sin 1x = \frac{1 \sin x}{1} - 0 + 0 - \ldots \qquad = \sin x$$

$$\sin 3x = \frac{3 \sin x}{1} - \frac{3.8}{1.2.3}\sin x^3 + 0 - 0 \ldots \qquad = 3\sin x - 4\sin x^3$$

$$\sin 5x = \frac{5 \sin x}{1} - \frac{5.24}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{5.24.16}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - 0 + 0 \ldots \qquad = 5\sin x - 20\sin x^3 + 16\sin x^5$$

s. í. t. s így mint már fennebb is találtatott volt

~~[illegible] így találjuk hogy [illegible]~~ Sin Sorozának ~~[illegible] következik. hogy [illegible]~~ ~~[illegible]~~ Sorozat kívül, a [illegible] n. többes [illegible] ~~[illegible] ebből, igaz a [illegible] következő~~ ~~[illegible]~~ illik, így [illegible] Sorozati ~~[illegible] fellel [illegible]~~ s az általános ~~[illegible] n.~~

$n=5$ ig tehát 17) igaz. Úgy. de ebből következik hogy $n=7$ re, s ebből hogy $n=9$ re — [illegible] s így tovább azaz mely (páratlan) n-re nézve is áll, ha tudni illik meg bizonyítjuk hogy mindig áll ~~általában~~ e ezen képlet igazsága $n-4$, s $n-2$ re nézve, mert akkor ebből szükségképen állani kell ~~[illegible]~~ n-re nézve is. mit a Sorozat [illegible] s kivonás leg elemibb szabályai azonnal kimutatnak.

Tegyük föl tehát, hogy áll az általános képlet $n-4$, s $n-2$ re nézve azaz tegyük fel igaznak hogy:

~~[illegible]~~

$$\sin(n-4)x = (n-4)\sin x - \frac{(n-4).\overline{(n-4)^2-1^2}}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{(n-4)\,\overline{(n-4)^2-1^2}.\overline{(n-4)^2-3^2}}{1.2.3.4.5.}\sin x^5 - \dots$$

és

$$\sin(n-2)x = (n-2)\sin x - \frac{(n-2).\overline{(n-2)^2-1^2}}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{(n-2)\overline{(n-2)^2-1^2}.\overline{(n-2)^2-3^2}}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - \dots$$

Lássuk a mi megállított fejtegetési szabály alkalmazásával mit nyerünk $\sin nx$-ül?

$\sin(n-2)x$ kifejezésében akármely tag képe ez.

$$\pm\frac{(n-2).\overline{(n-2)^2-1^2}.\overline{(n-2)^2-3^2}\dots\dots\overline{(n-2)^2-m^2}}{1.2.3.4.5.\dots\dots m+1.m+2}\sin x^{m+2}$$

s hát ugy az ebben a negyedik közöttie ez.

$$\mp\frac{(n-2)\overline{(n-2)^2-1^2}.\overline{(n-2)^2-3^2}\dots\overline{(n-2)^2-(m-2)^2}}{1.2.3\dots\dots m-1.m}\sin x^{m}$$

$\sin(n-4)x$ kifejezésében pedig a ugyanannyiadik tag mint itt az első — ez.

$$\frac{(n-4)\overline{(n-4)-1^2}.\overline{(n-4)^2-3^2}\dots\overline{(n-4)^2-m^2}}{1.2.3\dots\dots m+1.m+2}\sin x^{m+2}$$

Lássuk már mi lesz $\sin nx$-ben az ugyanannyiadik tag? Ez lesz (együttvéve vett után)

$$T=\left\{\begin{array}{l}\pm\dfrac{2.(n-2)\,\overline{(n-2)^2-1^2}.\overline{(n-2)^2-3^2}\dots\dots\overline{(n-2)^2-m^2}}{1.2\dots\dots m+1.m+2}\pm\\[3ex] \pm\dfrac{4.(n-2)\,\overline{(n-2)^2-1^2}.\overline{(n-2)^2-3^2}\dots\dots\overline{(n-2)^2-(m-2)^2}.\,m+1.m+2}{1.2.3\dots\dots m-1.m.m+1.m+2}\mp\\[3ex] \mp\dfrac{(n-4)\,\overline{(n-4)^2-1^2}.\overline{(n-4)^2-3^2}\dots\overline{(n-4)^2-m^2}}{1.2.3\dots\dots m+1.m+2}\end{array}\right\}\sin x^{m+2}$$

Vagy számításokat bevezetés ~~[illegible]~~ összevonás után

$$T = \left.\begin{array}{l} \pm\, 2.\,n-2.\,\dfrac{n-1.\,n+1.\,n+3 \;\ldots\ldots\; n+m-4.\,n+m-2}{.\,n-3.\,n-5.\,n-7 \;\ldots\ldots\; n-m.\,n+m-2} \;\pm \\[2ex] \pm\left\{4.\,n-2.\,\dfrac{n-1.\,n+1.\,n+3 \;\ldots\ldots\; n+m-4}{.\,n-3.\,n-5.\,n-7 \;\ldots\ldots\; n-m.}\right\} m+1.\,m+2 \;\mp \\[2ex] \mp\; n-4.\,\dfrac{n-3.\,n-1.\,n+1 \;\ldots\ldots\; n+m-4}{.\,n-5\;\, n-7.\,n-9 \;\ldots\; n-m-2.\,n-m-4.} \\ \hline 1.\,2.\,3 \;\ldots\ldots\; m+1.\,m+2 \end{array}\right\} \operatorname{Sin} x^{n+2}$$

vagy ismeretes $A = \dfrac{n+1.\,n+3 \;\ldots\ldots\; n+m-4.}{.\,n-1.\,n-3 \;\ldots\; n-m\ldots}$

$$T = \frac{\pm\, 2.\,n-2.\,n+m-2.\,n-m-2.\,A \pm 4.\,n-2.\,m+1.\,m+2.\,A \mp n-4.\,n-m-2.\,n-m-4.\,A}{1.\,2.\,3 \;\ldots\ldots\; m+1.\,m+2} \operatorname{Sin} x^{n+2}$$

$$= \frac{\pm\, n^3 + 2n^2m + m^2n - 2n^2 - 2nm\;\, A}{1.\,2 \;\ldots\ldots\; m+1.\,m+2} \operatorname{Sin} x^{n+2} = \frac{n.\,n+m-2.\,n+m.\,A}{1.\,3 \;\ldots\; m+2} \operatorname{Sin} x^{n+2} =$$

$$= \frac{n.\,\dfrac{n+1.\,n+3 \;\ldots\ldots\; n+m-2.\,n+m}{n-1.\,n-3 \;\ldots\ldots\; n-m-2.\,n-m}}{1.\,3 \;\ldots\ldots\; m+1.\,m+2} \operatorname{Sin} x^{n+2} =$$

$$= \frac{n.\,n^2-1.\,n^2-3^2 \;\ldots\ldots\; n^2-m^2}{1.\,3 \;\ldots\ldots\; m+1.\,m+2} \operatorname{Sin} x^{n+2}$$

s. t. b. ít.

egyenes azon képlet, mely a Sinust a páratlan többszörös Sinusa eredeti képletének bizonyítása bevd.

Folytatás a trigonometriai képletekről

Állván tehát ezek szerint — minden esetre (ha csak n páratlan) hogy

$$\sin nx = n\sin x - \frac{n.n^2-1}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{n.n^2-1.n^2-3^2}{1.2.3.4.5}\sin x^5 - \dots \qquad 17)$$

vagy azaz

$$\sin nx = n\sin x\left\{1 - \frac{\cancel{n.}\,n^2-1}{1.2.3}\sin x^2 + \frac{n^2-1.n^2-3^2}{1.2.3.4.5}\sin x^4 - \dots\right\} \qquad 18)$$

Vegyünk fel akármely y ívet, melynek tehát $\sin nx = \sin y$

s osszuk azt akárhány $= n$ ~~számu~~ egyenlő (de páratlan számú) részekre, s legyen egy ily rész $= x$, tehát lesz $y = nx$

és ~~lesz~~

$$\overset{A}{\sin y} = \overset{A}{\sin nx} = n\sin x\overset{B}{\left[1 - \frac{n^2-1}{1.2.3}\sin x^2 + \frac{n^2-1.n^2-3^2}{1.2.3.4.5}\sin x^4 - \dots\right]}$$

a B alatti képlet nyeri, n-eit végetlennek gondolva, s további újra B alá írva, mint végetlennek föltevés képletét.

$$n\sin x\overset{C}{\left[1 - \frac{n^2}{1.2.3}\sin x^2 + \frac{n^2.n^2}{1.2.3.4.5}\sin x^4 - \dots\right]}$$

S vegyük vizsgálat alá mi ~~kö~~ változás esik meg A, B, C alatti képletek bennünk, ha n-et s x-et változtatjuk: ~~Növeljük~~ Képzeljük tehát n-et a ~~végetlenig~~ határtalanul növekedni, de egyszersmind éppen oly mértékben apadni x-et, így minden új nagyobb n'-ből de egyszersmind kisebbedett x'-ből alakuló $n'x'$ szorzat egyenlő marad az előbbi nx-hez, s tehát y-hoz, s tehát $\sin y$ is ezen az előbbi lesz, s így a n-et így akármely növekedésnél, x-nek megfelelő apadása mellett, egyik A alatti kifejezésnek is be[illegible] nem változik. De egészen másként áll a dolog a B és C alattiakkal. Vegyük meg ilyet elsőbb a utóbbit.

C a két elemből áll; egyiket a szépelem kívüli $n \sin x$; másik a szépelem foglaltat együtt, hol fölötül csinál csak $n \sin x$ ~~-et~~ említett fordulat elé; és ma ~~[illegible]~~ nyilván való hogy $n \sin x$ a mi kifejezés, s mind inkább inkább kisebbedő ~~[illegible]~~ x is sinusának egésze, hol másként y is osztatott, mind inkább inkább és pedig határtalanul közeledik magának y ívnek kezdetes, magok a két x-ívek sinusai mind inkább inkább egyező csinos ívekkel, melyeknek száma n. Így tehát lévén $n \sin x = y$, s következőleg $n^2 \sin x^2 = y^2$ határtalan közeledéssel, ~~[illegible]~~ az egész C alatti kifejezés, hasonló értelemben, lesz =

D

$$C = y \left[1 - \frac{y^2}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right]$$

De mi lesz végre sorsa – n-nek nem növekedése s x-nek megfelelő apadása mellett – a B alatti kifejezésnek, ez a utolsó kérdés.

B is két elemből áll, ~~[illegible]~~ egyikből a szépelem kívül, az ~~[illegible]~~ itt is $n \sin x$, s tehát mint D-ben, kifejezése közelítéssel válik belőle = y; a másik a szépelemben álló tagokból, ezek közt az első, mint látjuk = 1 tehát ugyanaz, mi C-ben is első. S ezek nem változnak, a többiek pedig ismét ... lesz bajos

által, hogy az említett növekedés s apadás mellett, valamint

határtalan közeledésnek minden (azon) értelemben mi alatta C-ben

áll; mert (a $\underline{\sin x}$ mutatóiról, melyek sem akárról mind kettőben egyre

mint állanak, ~~nem is szólhat~~ nem is szólva) a mi a tényezőket

rendszerrel feltöltött illeti, egy ugyan hogy esetben B-ben

mindenütt ily alakot állanak $n^2-1, n^2-3^2, n^2-5^2 \ldots$

ott hol C-ben meg feltöltötték csak n^2-ket találunk,

de mind amazokban, a $-1^2, -3^2, -5^2$ stb. mindig

ugyan azoknak maradnak, n-nek akármely növekedése mellett is, látni

való hogy azon ~~az~~ $n^2-1, n^2-3^2 \ldots n^2-p^2$ stb. bajosak

határtalanul közelednek a' csupa n^2-ekhez. Ennek

világosabb általátása végett említsünk csak arra, mi

benn leginkább senki sem fog kétkedni. hogy akármely

két képlet együtt növekedő levén, ~~hogy~~ ~~mégis~~ nyilván

határtalanul közelednek egymáshoz, ha osztatásuk

bessze határtalanul közelít a 1-hez (minden szóval csak

így tekintj.) Mi vegyük akármelyik ~~feltét~~ B-ből elemét

melynek képe n^2-p^2 hol p n-nél ... növekedhető

s növekedő p pedig állandó; C-ben minden elem n^2 lévén

e' kettőnek osztatása $= \frac{n^2-p^2}{n^2} = 1-\frac{p^2}{n^2}$, s ezen osztat p

miként semmiset, p-nek változatlan maradása, s n-nek

határtalan növekedése mellett, határtalan közeledőnek

A j-hez, s törvényileg áll hogy ha B-ben foglal-

tató elemek mindegyike a C-benlevőkben. S tehát

az egész B-ben C-benlevő hasztalanul kérdezhető

ez pedig ismét hasztalan kérdezhető benne D-hez. ...

mutáns legelőbb meg volt mutatva hogy A minden-

esetre $A = B$ tehát hasztalan kérdeznék s

lesz $A = D$ vagyis

$$\sin y = y\left(1 - \frac{y^2}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} - \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots\right) \text{ vagy}$$

$$\sin y = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots \qquad 19)$$

Ez a nevezetes formula ~~mit~~ adja a Sinus hosszát-

ha az ív hossza (vagyis sinus formulákkal) adva van-

A Sinus ennek kifejezésétől nem lesz bajos ~~......~~ ki-

tanálni a Cosinusát is mivel a sinusok formulája sze-

rint $\cos y = \sqrt{1-\sin y^2}$, mely vagyis $\sin y$ 19) bel-

ből második emeletét venni, azt 1-ből kivonni-

s a maradék második gyökét kellene venni. Mivel

ha ..., ... ezen formula szerint

~~Sin y~~ Sin $\cos y^2 + \sin y^2 = 1$ keresni kellene

egy oly kifejletet, melynek második emelete Sin y-éval

összeadva második emeletével adjon 1-et tehát

Most ezen adatokat tehát is helyett adjuk kiszámítását a képletek

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1 \dots 6} + \dots \qquad 20)$$

S csak azon van hátra hogy ezt a mit adtunk, annak minőségében ~~kommensurabilitását~~ t. i. $\cos y$ egész kifejezésének lenni megmutassuk.

E végre az igért kikerekítés végett legyen ezen képlet most ~~ott~~ $\pm C$ valamint, rövidség' okáért a sinus kifejezése kifejezésnek neve S.

L. s. $$C + S = 1 + y - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - - \dots \qquad 21)$$

$$C - S = 1 - y - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - + \dots \qquad 22)$$

S szembe ötlő hogy ezen két képletek, minden tagjaikban, csak az összegeit mutatják különbségét s előjeleit illő pontban megfelelőleg egyenek s csupán előjegyeikben különböznek, s itt is azt mutatván, hogy 22-nak minden n-dik tag előjegye, 21-ben n+1-ikével egyenlő; egyébiránt felváltva két +, s két − ~~szinte~~ váltogatván egymást.

Továbbá

$$(C+S)^2 = C^2 + S^2 + 2CS = 1 + y - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} +$$

$$+ y + y^2 - \frac{y^3}{1.2} - \frac{y^4}{1.2.3} +$$

$$- \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.1.2} +$$

$$- \frac{y^3}{1.2.3} - \frac{y^4}{1.2.3} +$$

$+\frac{y^?}{1.2.3.4.5}$ − - - - - - - - - - hol y itt a nagyobbat alkotó hatványokban előjegyek változásaira különös figyelmet kell fordítani. A 2a változásmutató [illegible] a következőből áll.

$+\frac{y^5}{1.2.3.4}$ + - - - -

$+\frac{y^5}{1.2.3.\,1.2}$ − - - - -

1) y-nak páratlan [illegible] magokban foglaló hatványok egyenlő tagjaiban, a jegyek minden egyes tagnál egymásután vagy mindenütt + vagy mindenütt − jelesen

$+\frac{y^5}{1.2.\,1.2.3}$ + - - - -

23)

2) ha mindenik +, az 1ső 5ső 9ik: általában 4n+1ső rendű hatványokban, mindenik −, a 4n−1ső rendű hatványokban, és így

$+\frac{y^5}{1.2.3.4}$ − - - - -

$+\frac{y^5}{1.2.3.4.5}$ + - - - -

− - - -

3) Ugyanis a páratlan nagyobb rendűek hatványok tekintetében, ezekben, hol + s a [illegible] nem [illegible] a két fele jegy váltogatva [illegible] egymás ellenben

4. A páros nagyobb rendűek hatványaiban [illegible] tagos előjegyei váltakoz (+) s (−); s a felső sorban + al kezdődnek az [illegible] négyjegyűek [illegible] rangjukat, − al a [illegible] kettővel, a [illegible] [illegible]

$(C-S)^2 = C^2+S^2-2CS = \quad 1 - y - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} +$

$-y + \frac{y^2}{1} + \frac{y^3}{1.2} -$

− $\quad -\frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2} +$

$+\frac{y^3}{1.2.3} -$

$$+\frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

$$-\frac{y^3}{1.2.3} - \frac{y^5}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$+\frac{y^4}{1.2.\,1.2} - \frac{y^7}{1.2.3.\,1.2} - \ldots$$

$$-\frac{y^7}{1.\,1.2.3} - \frac{y^8}{1.2.\,1.2.3} + \ldots \quad 24)$$

$$+\frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^8}{1.\,1.2.3.4} - \ldots$$

$$-\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

$$-$$

Itt is [illegible] tartozik az előjegyzésben, mint a 23) alattinál, egyszersmind [illegible] hogy [illegible]

1) mint 23)ban [illegible]

2) itt a [illegible] rangú hatványok [illegible] + a [illegible] rangúak [illegible] − [illegible]

3) [illegible] előjegyzést a páratlan rangú hatványok [illegible]

4) Hasonlóag [illegible] áll mint 23)ban. —

Már most tegyük egy [illegible] észrevételt. Mind 23)ban mind 24) ban a páros rangú [illegible] hatványai [illegible] külön-külön, = 0. mert akármelyik ily hatványnak [illegible] pl. ez:

$$\pm\frac{y^n}{1.2\ldots n} \mp \frac{y^n}{1.2\ldots n-1.\,1} \pm \frac{y^n}{1.2\ldots n-2.\,1.2} \mp \frac{y^n}{1\ldots n-3.\,1.2.3} \pm \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{y^n}{1.2.3\ldots n}$$

~~[illegible]~~ mely képlet, ha [illegible], az első tagot [illegible] $\pm\frac{y^n}{1.2\ldots n}$ -et A-nak nevezzük, [illegible]

[illegible]

$$A\left(1 - \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1.2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \ldots +1\right) =$$

$$A.(1-1)^n = A.0^n = 0.$$

Kihagyván tehát a páros mutatóju hatványait, mint 0-ává levőket mind 23)-ból mind 24)-ből, lesz

$$(C+S)^2 = C^2+S^2+2CS = 1 + y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$
$$+ y - \frac{y^3}{1.2.1} + \frac{y^5}{1.2.3.4.1} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.1} + \dots$$
$$- \frac{y^3}{1.1.2} + \frac{y^5}{1.2.3.1.2} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.1.2} + \dots$$
$$- \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.1.2.3} - \frac{y^7}{1.2.3.4.1.2.3} + \dots$$
$$+ \frac{y^5}{1.1.2.3.4} - \frac{y^7}{1.2.3.1.2.3.4} + \dots$$
$$+ \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2.1.2.3.4.5} + \dots$$
$$- \frac{y^7}{1.1.2.3.4.5.6} + \dots$$
$$- \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$
$$+ \dots$$
$$+ \dots$$

vagy is mint egy hasonló rendbe sorolva

$$(C+S)^2 = C^2+S^2+2CS = 1 + 2y - \frac{(2y)^3}{1.2..3} + \frac{(2y)^5}{1.2..5} - \frac{(2y)^7}{1.2..7} + \frac{(2y)^9}{1.2..9} - \dots \quad 25)$$

És mivel fönebb meg jegyeztem, hogy $(C-S)^2$ kifejtésére y páros mutatóju mind kijegyeztetnek, a páratlan mutatójuak hasonlóan pedig $(C+S)^2$ ejétől csak abban különböznek (kivánatos jegyet) hogy (mindenütt hol a negyedikben − és + + ~~helyett~~ és − állt, ~~mindenütt fordítva~~), tehát

$$(C-S)^2 = C^2+S^2-2CS = 1 - 2y + \frac{(2y)^3}{1.2..3} - \frac{(2y)^5}{1.2..5} + \frac{(2y)^7}{1.2..7} - \frac{(2y)^9}{1.2..9} + \quad 26)$$

s végre 25) s 26)t egybeadván kapjuk

$$(C+S)^2+(C-S)^2 = 2C^2+2S^2 = 2(C^2+S^2) = 2 \quad \text{s innen}$$

$$C^2+S^2=1, \quad \text{tehát} \quad C^2 = 1-S^2 = 1-\sin y^2 = \cos y^2 \quad \text{s}$$

legvégre, áll be hogyan hogy $C = \cos y$ ll. B.V.

A 19) s 20) alatti ezen két alapformulákat [illegible] kifejezi [illegible] a sinust alkotja az ív páratlan emeléseinek sora, minden emelést osztva az egytől addig terjedő számok szorzatával kiegészítve a emelést, s a hogy kijönő tagokat + és − váltogatva előjegyzettel minduntalan egyesítvén.

A cosinust pedig alkotja az ív páros emelései ($y^0=1$) sőt [illegible] ugyanazon tulajdonságát, s [illegible] váltogatva [illegible] mint a sinus sorát.

(Euler tanítván)

De továbbá egyszer ezen sorokat vagy képzelleges mennyiségekkel is hogyan képtelen képletek alakjában fejezi ki melyek a következők:

$$1)\ \cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}}{2}; \qquad 27)$$

$$2)\ \sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}}-e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}; \qquad 28)$$

Hogy ezen képletek $\cos y$ és $\sin y$-t fejezik ki, azt csak abban az értelemben kell venni, hogy valamikor ezen kifejezéseken az algebrai ~~[illegible]~~ ösmeretes törvényei szerint valamely műveletet teszünk végbe, abból valamely értelmes eredményt kapunk, az eredmény mindig ugyanaz lesz, ami kijön ha ugyan mennyiségek $\sin y$, s $\cos y$ (lásd 20) alá bírt [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] véghez. [illegible] e czélra két esetben, melyek

között az első [illegible] egy [illegible] kifejezések egyenlőségeit

mutatja ki (mindenre [illegible])

ezen ismert formulát [illegible]: $e^p = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p^2}{1.2} + \frac{p^3}{1.2.3} + \cdots$

alkalmazva $e^{y\sqrt{-1}}$ s $e^{-y\sqrt{-1}}$ kifejtésére kapjuk:

$$e^{y\sqrt{-1}} = 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \frac{(y\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \cdots \qquad 29)$$

$$e^{-y\sqrt{-1}} = 1 + \frac{(-y\sqrt{-1})}{1} + \frac{(-y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(-y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \frac{(-y\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{y\sqrt{-1}}{1} - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \cdots \qquad 30)$$

Innen [illegible]

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2\cdots6} + \frac{y^8}{1.2\cdots8} - \cdots = \cos y \;;$$

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{\frac{2y\sqrt{-1}}{1} - \frac{2y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{2y^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{2y^7\sqrt{-1}}{1.2\cdots7} + \cdots}{2\sqrt{-1}} =$$

$$= y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2\cdots7} + \cdots = \sin y$$

MBP.

Továbbá [illegible] is kijön hogy

$$\left(\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 + \left(\frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2}\right)^2 = 1$$ [illegible]

tehát $$\frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} - 2}{-4} + \frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} + 2}{4} =$$

$$\frac{-e^{2y\sqrt{-1}} - e^{-2y\sqrt{-1}} + 2}{-4} + \frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

S valóban, mentől a [illegible] vagy Cardani kifejezés[illegible] egyéb ~~valamely~~ móddal bebizonyítására, a bebizonyításból a másikat kivonni [illegible] nem is, de mi [illegible] kifejezések [illegible] nem [illegible], s legfeljebb [illegible] úgy [illegible] mutat, mint [illegible] – de [illegible] ki- fejezések [illegible] alkalmazható. [illegible] [illegible] sajátságát – s abban is [illegible] kezdeni ~~[illegible]~~ [illegible], hogy valamely fontos [illegible] kiszámítására igen [illegible] elnevezni, melynek ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible] [illegible] – ([illegible] [illegible] vizsgálatban [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ bebizonyítása ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ rendszeres [illegible] –. Adjunk még egy nemesebb alkalmazásra példát –.

A 27) s 28) egyenletekből kijön

1)

1) [illegible]

$$2\cos y = e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}} \quad ; \quad 2\sin y\sqrt{-1} = e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}$$

2) ezen két új egyenlet összeadásából

$$2\left(\cos y + \sin y\sqrt{-1}\right) = 2e^{y\sqrt{-1}} \quad \text{vagy} \quad e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sin y\sqrt{-1}$$

3) kivonásával

$$2(\cos y - \sin y\sqrt{-1}) = 2e^{-y\sqrt{-1}} \quad \text{vagy;} \quad e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sin y\sqrt{-1}$$

4) Egyenlőknek logarithmusai is egyenlők. s pedig is [illegible] logarithmusaik [illegible]

$$\log\left(e^{y\sqrt{-1}}\right) = y\sqrt{-1} = \log(\cos y + \sin y\sqrt{-1}) = \log \cos y\left(1 + \frac{\sin y}{\cos y}\sqrt{-1}\right)$$

$$= \log \cos y\,(1 + \tan y\sqrt{-1}) \quad \ldots \quad 31)$$

Szintúgy

$$\log\left(e^{-y\sqrt{-1}}\right) = -y\sqrt{-1} = \log(\cos y - \sin y\sqrt{-1}) = \log \cos y\left(1 - \frac{\sin y}{\cos y}\sqrt{-1}\right) =$$

$$= \log \cos y\,(1 - \tan y\sqrt{-1}) \quad \ldots \quad 32)$$

5) 31)ből kivonva 32)t

$$2y\sqrt{-1} = \log \cos y\,(1 + \tan y\sqrt{-1}) - \log \cos y\,(1 - \tan y\sqrt{-1}) =$$

$$= \log\left(\frac{\cos y\,(1 + \tan y\sqrt{-1})}{\cos y\,(1 + \tan y\sqrt{-1})}\right) = \log \frac{1 + \tan y\sqrt{-1}}{1 - \tan y\sqrt{-1}} \quad \text{s. s.}$$

6) tehát ezen ösmeretes log. képlet szerint

$$\log \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right) \quad \text{Lásd.}$$

7) $$2y\sqrt{-1} = \log \frac{1 + \tan y\sqrt{-1}}{1 - \tan y\sqrt{-1}} = 2\left(\tan y\sqrt{-1} - \frac{\tan^3 y\sqrt{-1}}{3} + \frac{\tan^5 y\sqrt{-1}}{5} - \ldots\right)$$

=

$$= 2\sqrt{-1}\left(\operatorname{tang} y - \frac{\operatorname{tang} y^3}{3} + \frac{\operatorname{tang} y^5}{5} - \frac{\operatorname{tang} y^7}{7} + \dots\right)$$ [illegible]

8) egyenlet mind két felét osztva $2\sqrt{-1}$ el, kapjuk

$$y = \operatorname{tang} y - \frac{\operatorname{tang} y^3}{3} + \frac{\operatorname{tang} y^5}{5} - \dots$$ egy ismeretes 32*)

formulát, mely ha valamely ívnek tangense van adva, abból magának az ívnek hosszát határozni képesít bennünket.

[illegible] [illegible] [illegible] formulába a képletben [illegible] [illegible] határoztatnak (rendesen az úgy nevezett, [illegible] [illegible] [illegible] alkalmazásával történik, [illegible] feltételezések [illegible] [illegible] el fogadva [illegible]) meg történhetik a [illegible] [illegible] (s meg történhetett volna a feltételek) [illegible] [illegible] képletek által is, de ~~[illegible]~~ sokkal hosszadalmasabban [illegible] [illegible]

ha $\sin y = y - \frac{y^3}{1\dots3} + \frac{y^5}{1\dots5} - \dots$ ~~egyenletet megfordítjuk~~

$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1\cdot2} + \frac{y^4}{1\dots4} - \dots$ ~~egyenleteket [illegible] [illegible] módon [illegible] kapjuk~~

$$\frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{tang} y = \frac{y - \frac{y^3}{1\dots3} + \frac{y^5}{1\dots5} - \dots}{1 - \frac{y^2}{1\cdot2} + \frac{y^4}{1\dots4} - \dots} = Ay + By^3 + Cy^5 + \dots \quad 33)$$

s A. B. C. együtthatók [illegible] határoztatnak [illegible].

Ezen [illegible] egyenletet $\operatorname{tang} y = Ay + By^3 + Cy^5$ megfordítjuk, [illegible] y [illegible] fejezzük ki $\operatorname{tang} y$ [illegible], [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] meg, hogy fel [illegible] a határozatlan [illegible] [illegible] egyenletet

$$y = \alpha \operatorname{tang} y + \beta \operatorname{tang} y^3 + \gamma \operatorname{tang} y^5 - \dots \quad 34)$$

$\tang y$, $\tang y^2$, $\tang y^3$ ... [illegible] [illegible], [illegible] 33)-bol

[illegible] [illegible] [illegible] 34)-be [illegible] egy [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] α, β, γ [illegible] mellett, [illegible] y [illegible] A, B,

C [illegible] [illegible] [illegible]. Ebből [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible], hogy a egyenletet 0-ra [illegible] y [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] egyenlő $= 0$, [illegible]

egyenletek [illegible], meg határozhatni α, β, γ

[illegible] 34)-be helyettesítésével [illegible] [illegible] y-

$\tang y$ [illegible] által. — Ha [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] y [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] hogy [illegible] 32*) [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]. Így [illegible] [illegible] egy [illegible] [illegible]

[illegible] hogy $\tang 45° = 1$ [illegible] (—

$$\text{arc. } 45° = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \quad \text{[illegible]}$$

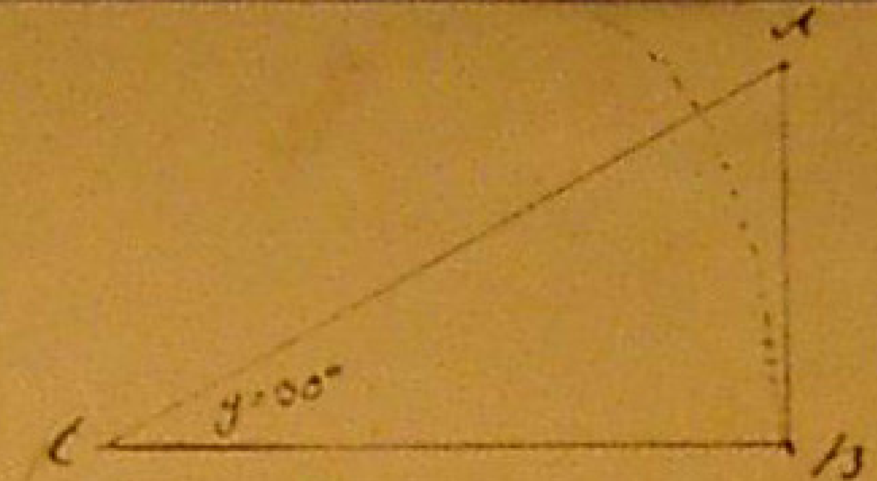
$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots \quad \text{[illegible] Leibnitztól}$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ([illegible]) [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. —

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]



Ha $y = 30°$ [illegible]

hogy $AB = \text{tg}\,30°$

$CB = 1$; $AC = 2\,AB$

s így $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + 1$

$= 4\overline{AB}^2$

$\text{tg}^2 y = \frac{1}{3}$, $\text{tg}\, y = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ [illegible]

$$y = \text{arc}\,30° = \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3^3 3} + \frac{3^2\sqrt{3}}{3^5 5} - \frac{3^3\sqrt{3}}{3^7 7} =$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^3} - \frac{1}{7.3^4} + \cdots\right)$$ [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$\pi = 16\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3^1} + \frac{2}{5.7.3^3} + \frac{3}{9.11.3^5} + \cdots\right)$$

hol a [illegible] [illegible] [illegible] . [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] π , a [illegible] [illegible] [illegible]

6 tagos [illegible] ..

[illegible] [illegible] vége

Trigonometriai képletek

1.) $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$. és 2.) $\frac{\cos x}{\sin x} = \text{cotang}\,x$. tehát $\tan x = \frac{1}{\cot x}$ és $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

3. $\frac{1}{\cos x} = \sec x$. és 4.) $\frac{1}{\sin x} = \text{cosec}\,x$

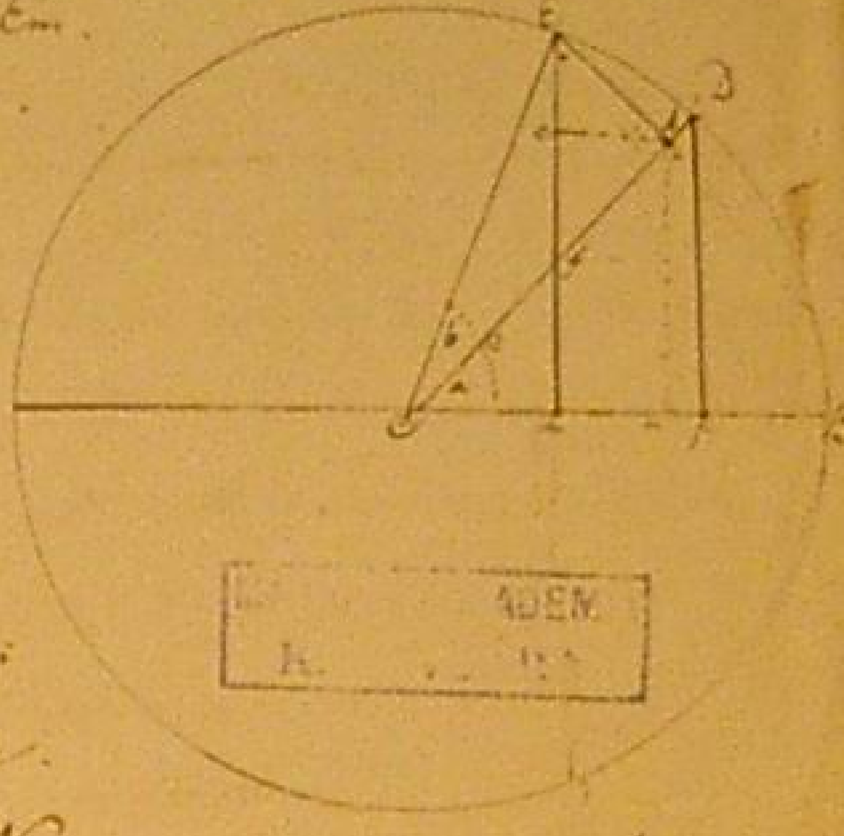
5.) $1 - \cos x = \text{sinversus}\,x$, és 6.) $1 - \sin x = \text{cosvers}\,x$

7.) $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$, tehát

8.) $\sin x = \sqrt{1-\cos x^2}$ és 9.) $\cos x = \sqrt{1-\sin x^2}$

10.) Két ív öszvesének ~~különbségének~~ sinusa, 's cosinusa, azoknak sin. 's cosin. jav.

a.) $BD = x$, $DE = y$; $\sin x = Dp$, $\sin y = Ed$, $\sin(x+y) = Em$.
$\cos x = Cp$, $\cos y = Cd$, $\cos(x+y) = Cm$.



tehát $\frac{om = dn}{Dp} = \frac{Cd}{1}$, vagy $om = \sin x . \cos y$.

és $\frac{Eo}{Ed} = \frac{Cp}{1}$; vagy $Eo = \sin y . \cos x$; tehát

$om + Eo = \sin(x+y) = \sin x . \cos y + \sin y . \cos x$.

b.) $\frac{Cn}{Cp} = \frac{Cd}{1}$ vagy $Cn = Cp . Cd = \cos x . \cos y$;

és $\frac{mn = od}{Ed} = \frac{Dp}{1}$; vagy $mn = Ed . Dp = \sin x . \sin y$;

tehát $Cn - mn = \cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$.

11.) Különbségek sinusa és cosinusa. Nevezve $(x+y) = z$; lesz

a.) $z - y$; $x = z - y$, 's tehát $\sin z = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, vagy írva

$\sin y \cos x = \sin z - \sin x \cos y$ (a) és

$\cos z = \cos x . \cos y - \sin x \sin y$; vagy írva $\cos x . \cos y = \cos z + \sin x . \sin y$ (b)

'S most (a)-t osztva (b)-vel: $\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin z - \sin x \cos y}{\cos z + \sin x \sin y}$; kifejezni $\sin x$ et

$\sin y . \cos z + \sin x . \sin y^2 = \sin z \cos y - \sin x \cos y^2$, a' $\sin x$ eseket egy felöl írva

$\sin x \sin y^2 + \sin x \cos y^2 = \sin z \cos y - \sin y \cos z$. tehát

$\sin x = \frac{\sin z \cos y - \sin y \cos z}{\sin y^2 + \cos y^2 = 1} = \sin z \cos y - \sin y \cos z$, végre mivel $x = z - y$

$\sin(z - y) = \sin z \cos y - \sin y \cos z$. És

b.) (a)-t és (b)-t másképp írva $\sin x . \cos y = \sin z - \sin y \cos x$ (a) és

$\sin x . \sin y = \cos x . \cos y - \cos z$ (b) az elsöt osztva

$\frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin z - \sin y \cos x}{\cos x . \cos y - \cos z}$; s ebböl:

$\cos x \cos y^2 - \cos z . \cos y = \sin z . \sin y - \cos x . \sin y^2$; $\cos x$ eseket egy felöl írva

$\cos x \cos y^2 + \cos x \sin y^2 = \cos z \cos y + \sin z \sin y$; vagy

$\cos x = \frac{\cos z . \cos y + \sin z . \sin y}{\sin y^2 + \cos y^2 = 1} = \cos z \cos y + \sin z . \sin y$; végre mivel $x = z - y$

$\cos(z - y) = \cos z . \cos y + \sin z . \sin y$. (vagy 10 és 11 általánosan.)

12.) a.) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$ és

b.) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

13.) Jövőzések tangense.

$\mathrm{Tang}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$; felső s alsót osztva $(\cos y . \cos x)$-el

$\mathrm{Tang}(x+y) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x . \sin y}{\cos x . \cos y}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\mathrm{tang}\, x + \mathrm{tang}\, y}{1 - (\mathrm{tang}\, x . \mathrm{tang}\, y)}$

14.) Győ többszörös sinusai e. félig $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$, $\sin 7x$ ... $\sin(2n+1)x$.

(~~Emlékeztető~~ a.) $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$ és így

b.) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x^2 - \sin x^2$ ~~[illegible]~~ vagy $\cos x^2$ helyett írva $1 - \sin x^2$

c.) $\cos 2x = 1 - 2 \sin x^2$), vagy ismét $\sin x^2$ helyett írva $1 - \cos x^2$,

d.) $\cos 2x = 2 \cos x^2 - 1$.) Láttuk ezt előbb.

14

a.) $\sin nx = \sin nx$ (n páratlan szám s. t. f.)

b.) $\sin(n-2)x = \sin(nx - 2x) = \sin nx \cos 2x - \sin 2x . \cos nx$

c.) $\sin(n-4)x = \sin((n-2)x - 2x) = (\sin nx . \cos 2x - \sin 2x . \cos nx) \cos 2x - \sin 2x \cos(n-2)x$.

vagy $\cos(n-2)x$ helyett beszé írva u. m. $\cos nx . \cos 2x + \sin nx . \sin 2x$,

D.) $\sin(n-4)x = (\sin nx . \cos 2x - \sin 2x \cos nx) \cos 2x - \sin 2x (\cos nx . \cos 2x + \sin nx \sin 2x)$

vagy $\sin(n-4)x = \sin nx . \cos 2x . \cos 2x - \sin 2x \cos nx \cos 2x - \sin 2x . \cos nx . \cos 2x - \sin nx . \sin 2x . \sin 2x$

$= \sin nx . \cos 2x . \cos 2x - 2 \sin 2x . \cos nx . \cos 2x - \sin nx . \sin 2x . \sin 2x$

D+A.) $\sin nx + \sin(n-4)x = \sin nx \cos 2x^2 - 2 \sin 2x \cos nx . \cos 2x + \sin nx - \sin nx . \sin 2x^2 =$

$= \sin nx . \cos 2x^2 - 2 \sin 2x \cos nx . \cos 2x + \sin nx (1 - \sin 2x^2) =$

$= \sin nx \cos 2x^2 - 2 \sin 2x \cos nx . \cos 2x + \sin nx \cos 2x^2 =$

$= 2 \sin nx . \cos 2x^2 - 2 \sin 2x . \cos nx . \cos 2x =$

$2 \cos 2x (\sin nx . \cos 2x - \sin 2x . \cos nx) =$

$= 2 \cos 2x (\sin(n-2)x)$; vagy mivel c.) szerint $\cos 2x = 1 - 2 \sin x^2$

$\sin nx + \sin(n-4)x = 2 \sin(n-2)x - 4 \sin(n-2)x . \sin x^2$; s átvive

$\sin nx = 2 \sin(n-2)x - 4 \sin(n-2)x . \sin x^2 - \sin(n-4)x$

Tehát $\sin(-1x) = -\sin x$ $= -1 \sin x$

$\sin(+1)x = +\sin x$ $= +1 \sin x$

$\sin +3x = 2 \sin x - 4 \sin x . \sin x^2 + \sin x . = 3 \sin x - 4 \sin x^3$ ~~[illegible]~~

$\sin 5x = 2 . (\sin 3x) - 4 . (\sin 3x . \sin x^2 - \sin x . = 5 \sin x - 20 \sin x^3 + 16 \sin x^5$

$\sin 7x = 7 \sin x - 56 x^3 + 112 x^5 - 64 x^7$

$\sin 9x = 9 \sin x - 120 x^3 + 432 \sin x^5 - 560 x^7 + 256 x^9$

$\sin 11x = 11 \sin x - 220 x^3 + 1232 x^5 - 2784 \sin x^7 + 2752 \sin x^9 - 1024 \sin x^{11}$.

(Különlegesen jegyzék, páratlan emeletek, s mint vagy számjelzője a felette álló kitevő, az az előző négyzet, s ezek összevétéből kivonva a második sorba felette állót. E szerint minden két szomszédnak a sinusaiból az utána következő (mind csak páratlan) sinusai ki lehet kapni; s tehát $\sin x$ és $-\sin x$-ből mindenikét rendre-rendre, hozzáadhatnám, kisebbítenünk tehát egy általános képletet, vagy annak tagképét. —

Ezen lehet venni hogy az előbb többszörösek, mint $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$ sz. alakja

17

n általánosan, az $\sin nx = \frac{n}{1}x - \frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3}x^3 + \frac{n.n^2-1^2.n^2-3^2}{1.2.3.4.5}x^5 - \frac{n.n^2-1^2.n^2-3^2.n^2-5^2}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 \ldots$

azomban ha ez áll $\sin 5x$ és $\sin 7x$-re, állani kell $\sin 9x$, s abból tovább

és páratlanokra is, mivel arról meggyőződhetünk, ha $(n-4)x$ és $(n-2)x$

ről igaznak vevén fel megbizonyítjuk hogy nx-ben a' meghatározás lesz az mi az

$(n-2)$ és $(n-4)x$ illető soraiból ~~[illegible]~~ modern egyenletéből kijön.

Igaz legyen tehát hogy

$$\sin(n-4)x = (n-4)x - \frac{(n-4).(n-4)^2-1^2}{1.2.3}x^3 + \frac{n-4.(n-4)^2-1^2.(n-4)^2-3^2}{1.2.3.4.5}x^5 \ldots \text{ és}$$

$$\sin(n-2)x = (n-2)x - \frac{(n-2)(n-2)^2-1^2}{1.2.3}x^3 + \frac{(n-2).(n-2)^2-1^2.(n-2)^2-3^2}{1.2.3.4.5}x^5 \ldots$$

Tehát $\sin(n-2)$ben $\mathfrak{T}_n = \frac{(n-2).(n-2)^2-1^2.(n-2)^2-3^2 \ldots\ldots (n-2)^2-m^2}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots m+1.m+2}x^{m+2}$, ugyan

abban $\mathfrak{T}_{n-1} = \frac{(n-2)(n-2)^2-1^2.(n-2)^2-3^2 \ldots\ldots (n-2)^2-(m-1)^2}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots (m-1).m}x^{m}$ és

$\sin(n-4)$ben $\mathfrak{T}_n = \frac{(n-4)(n-4)^2-1^2.(n-4)^2-3^2 \ldots\ldots (n-4)^2-m^2}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots (m+1).m+2}x^{m+2}$ Ezekből a' fellebbiek

szerint [illegible] hatványokra [illegible] $\sin x^{m+2}$-vel [illegible] együtthatója lesz

$$\sin nx \text{ ben } \mathfrak{T}_n = \left\{ \begin{array}{l} \pm \frac{2(n-2)(n-2)^2-1^2.(n-2)^2-3^2 \ldots\ldots (n-2)^2-m^2}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots (m+1).(m+2)} \cancel{x} \pm \\ \pm \frac{4(n-2)(n-2)^2-1^2.(n-2)^2-3^2 \ldots\ldots (n-2)^2-(m-1)^2}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots m-1.m} \cancel{x} \mp \\ \mp \frac{(n-4)(n-4)^2-1^2.(n-4)^2-3^2 \ldots\ldots (n-4)^2-m^2}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots m+1.m+2} \cancel{x} \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{T}_n = \frac{\left.\begin{array}{l} \pm 2.n-2.\frac{n+1}{n-1}\frac{n+3}{n-3}\frac{n+5}{n-5}\ldots\frac{n+m-4}{n-m-4}.\frac{n+m-2}{n-m-2} \pm \\ \pm 4.n-2.\frac{n+1}{n-1}\frac{n+3}{n-3}\frac{n+5}{n-5}\,n-7\ldots\frac{n+m-4}{}\ m+1.m+2 \mp \\ \mp n-4\ \frac{n+1}{n-1}\frac{n+3}{n-3}\frac{n+5}{n-5}\ldots\frac{n+m-4}{n-m-1.n-m-7}\end{array}\right.}{1.2.3.4.5.6.7 \ldots\ldots m+1.m+2}\sin x^{m+2}$$

vagy nevezve $A = \frac{n+1}{n-1}\frac{n+3}{n-3}\frac{n+5}{n-5}\ldots\frac{n+m-4}{n-m+4}$ lesz

$$\mathfrak{T}_n \frac{\pm(2.n-2.n+m-2.n-m-2)A \pm (4.n-2 \ldots m+1.m+2)A \mp (n-4.n-m-2.n-m-4)A}{1.2.3.4.5 \ldots\ldots m+1.m+2}\sin x^{m+2}$$

$$= \frac{(n.2n^2m+m^2n-2m^2-2nm)A}{1.2.3 \ldots m+1.m+2}\sin x^{m+2} = \frac{n.(n+m+2).(n+m)A}{1.2.3 \ldots m+1.m+2}\sin x^{m+2} =$$

$$= \cancel{m+2} = \frac{n.\frac{n+1}{n-1}\frac{n+3}{n-3}\frac{n+5}{n-5}\ldots\frac{n+m-2}{n-m-2}.\frac{n+m}{n-m}}{1.2.3.4.5 \ldots m+1.m+2}\sin x^{m+2} =$$

$$= \frac{n.n^2-1^2.n^2-3^2 \ldots\ldots n^2-m^2}{1.2.3 \ldots\ldots m+1.m+2}\sin x^{m+2}$$ Tehát

$$\sin nx = \frac{n}{1}\sin x - \frac{n.n^2-1^2}{1.2.3}\sin x^3 + \frac{n.n^2-1^2.n^2-3^2}{1.2.3.4.5}\sin x^5 \ldots$$

végül egy ajánlat s az egészet el n nagy egy ilyen x-nek nevezzük, lesz

$$\overset{A}{\sin y} = \overset{A}{\sin nx} = n.\sin x\left(1 - \frac{n^2-1^2}{1.2.3}\overset{B}{x^2} + \frac{n^2-1^2.n^2-3^2}{1.2.3.4.5}\sin x^4 - \ldots\ldots\right)$$ vegyük mellé ezen

képletet (végetlen) $n\sin x\left(1 - \frac{n^2}{1.2.3}\sin x^2 + \frac{n^2.n^2}{1.2.3.4.5}\sin x^4 - \ldots\ldots\right)$ s nézzük meg,

C.

A. D. C ben miután kiirtottuk $n$nek változásával. A marad még n nagyobbodván épen úgy közelitést x. Tehát C: kis elemi között a külső $n.\sin x$ nak végetlen közelítik a' szögben (kis és öszvesinusa egybe esvén), ugyanazok melesei vannak pedig benn a' végetlen (illetve elsőrendűkkel) s tehát ezek is y hoz határtalan közeledvén azoknak ehez közelednek.

$$\sin nx = \sin y = y\left(1 - \frac{y^2}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} \ldots\right) = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots ;$$

Tehát B: ennek is külső elemi mi a' Cé volt tehát $= y$, benn a' szó a Cben n^2 volt ott n^2-1^2, n^2-3^2 sat. állanak mik $n$nek növekedtével $-1^2, -3^2$, sat. nek megmaradása mellett közelednek n^2 hez, s tehát $B = C = D$; tehát $= D$ vagy $\sin y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$ (15.)

<u>Cosinuszt is lássuk</u>. Cosinusz levén $= \sqrt{1-\sin y^2}$ vagy $\cos y^2 + \sin y^2 = 1$. Melyik arra fővén meg (15) hez adatván, tes azon ? eltgmondjuk s azzá megbizonyítjuk hogy előző ez: $\cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4.} - \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} \ldots$ (most nevezve e képletet $= C$ és Sinusát $= S$.)

$$C + S = 1 + y - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^6}{1.2.3\ldots6} - \ldots \quad (16) \text{ és}$$

$$C - S = 1 - y - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^5}{1.2.\ldots5} - \ldots \quad (17.)$$

Továbbá

$$\left.\begin{array}{l}(C+S)^2 = C^2+S^2+2CS = 1 + y - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \\ \qquad + y + \frac{y^2}{1} - \frac{y^3}{1.2.1} - \frac{y^4}{1.2.3.1} + \frac{y^5}{1.2.3.4.1} + \ldots \\ \qquad - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3}{1.2.1} + \frac{y^4}{1.2.12} + \frac{y^5}{1.2.3.12} - \ldots \\ \qquad - \frac{y^3}{1.2.3} - \frac{y^4}{1.2.3.1} + \frac{y^5}{1.2.3.12} + \ldots \\ \qquad + \frac{y^4}{1.2.3.4.} + \frac{y^5}{1.2.3.4.1} - \ldots \\ \qquad + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \end{array}\right\} 18.$$

Továbbá

$$\left.\begin{array}{l}(C-S)^2 = C^2+S^2-2CS = 1 - y - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \\ \qquad - y + \frac{y^2}{1} + \frac{y^3}{1.2} - \frac{y^4}{1.2.3} - \frac{y^5}{1.2.3.4} + \\ \qquad - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.12} - \frac{y^5}{1.2.3.12.} - \\ \qquad + \frac{y^3}{1.2.3} - \frac{y^4}{1.1.2.3} - \frac{y^5}{1.2.12.3} + \\ \qquad + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^5}{1.1.2.3.4.} - \\ \qquad - \frac{y^5}{1.2.3.4.5.} \end{array}\right\} 19$$

Megjegyezvén hogy mind 18, mind 19ben a' páros emeletek hatványai $= 0$, mert ezek képe levén $\pm\frac{y^n}{1.2\ldots n} \mp \frac{y^n}{1.2\ldots n-1.1} \pm \frac{y^n}{1.2\ldots n-2.12.} \mp \frac{y^n}{1.2\ldots n-3.123}$, ebben az első tagot Anak nevezve, lesz $= A\left(1 - \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1.2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} + \ldots\right) = A(1-1)^n = A.0^n = 0$; ezeket tehát elhagyván, s a' többeket csak magokban tekintve, látszik hogy

$$(C+S)^2 = 1 + 2y - \frac{(2y)^3}{1.2.3} + \frac{(2y)^5}{1.2.3.4.5} \ldots (20) \text{ és } (C-S)^2 = 1 - 2y + \frac{(2y)^3}{1.2.3} - \frac{(2y)^5}{1.2.3.4.5} \ldots (21)$$

s 20 és 21et öszveadva végeredményül kijön hogy (mivel csak jegyeik különbözők)

$$2 = (C+S)^2 + (C-S)^2 = C^2 + S^2 + 2CS + C^2 + S^2 - 2CS = 2(C^2+S^2) = 2; \text{ tehát}$$

$(C^2 + S^2) = 1$; vagy $\cos x = 1 - \sin x^2$ MBD.

22, Euler formulái, melyek Cosinust és Sinust képzeletes alakban fejeznek ki:

$$\cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2} \; ; \text{ és } \quad \sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

. Ezt alkalmazva veszük azon igazságot hogy $e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{1.2} + \frac{t^3}{1.2.3} \ldots\ldots$ lesz

$$e^{y\sqrt{-1}} = 1 + \frac{y\sqrt{-1}}{1} - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \quad (23) \text{ és}$$

$$e^{-y\sqrt{-1}} = 1 - \frac{y\sqrt{-1}}{1} - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots \quad (24)$$

Tehát ezekből

$$\cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

; a mit tudjuk is; és

$$\sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{\frac{2y\sqrt{-1}}{1} - \frac{2y^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{2y^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots}{2\sqrt{-1}} = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3\ldots} \ldots$$

(mit mi is tudunk).

25, Az is kijő hogy $\sin^2 + \cos^2 = \left(\frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^2 = 1$. ezen kifejezve

$$\frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} + 2}{4} + \frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} - 2}{-4} = \frac{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2y\sqrt{-1}} + 2}{4} + \frac{-e^{2y\sqrt{-1}} - e^{-2y\sqrt{-1}} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

26. Alkalmazásuk Euler-képleteinek. Kijő belőlük hogy

1) $2\cos y = e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}$; $2\sin y\sqrt{-1} = e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}$ ezeket összevonva

2) $2(\cos y + \sin y\sqrt{-1}) = 2e^{y\sqrt{-1}}$; vagy $e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sin y\sqrt{-1}$ egyenleteket kivonva

3) $2(\cos y - \sin y\sqrt{-1}) = 2e^{-y\sqrt{-1}}$; vagy $e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sin y\sqrt{-1}$; egyenlők logar. =k; lesz

$\log\left(e^{y\sqrt{-1}}\right) = y\sqrt{-1} = \log(\cos y + \sin y\sqrt{-1}) = \log\cos\left(1 + \frac{\sin y}{\cos y}\sqrt{-1}\right) = \log\cos(1 + \tan y\sqrt{-1})$ (27)

hasonlóan $\log\left(e^{-y\sqrt{-1}}\right) = -y\sqrt{-1} = \log(\cos y - \sin y\sqrt{-1}) = \log\cos y\left(1 - \frac{\sin y}{\cos y}\sqrt{-1}\right) = \log\cos y(1 - \tan y\sqrt{-1})$ 28,

és 27,ből 28at kivonva: $2y\sqrt{-1} = \log\cos y(1 + \tan y\sqrt{-1}) - \log\cos(1 - \tan y\sqrt{-1}) =$

$$= \log\left(\frac{\cos y(1 + \tan y\sqrt{-1})}{\cos y(1 - \tan y\sqrt{-1})}\right) = \log\left(\frac{1 + \tan y\sqrt{-1}}{1 - \tan y\sqrt{-1}}\right)$$

s a logarismikus képleteknél előfordult képlet szerint hogy $\log\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\ldots\right)$.

$$2y\sqrt{-1} = \log\frac{1 + \tan y\sqrt{-1}}{1 - \tan y\sqrt{-1}} = 2\left(\tan y\sqrt{-1} - \frac{\tan y^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{\tan y^5\sqrt{-1}}{5} - \frac{\tan y^7\sqrt{-1}}{7} + \ldots\ldots\right) =$$

$$2y\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}\left(\tan y - \frac{\tan y^3}{3} + \frac{\tan y^5}{5} \ldots\ldots\right)$$

osztva mind két felét a $2\sqrt{-1}$el: $y = \tan y - \frac{\tan y^3}{3} + \frac{\tan y^5}{5} - \ldots\ldots$ (29) nevezetes

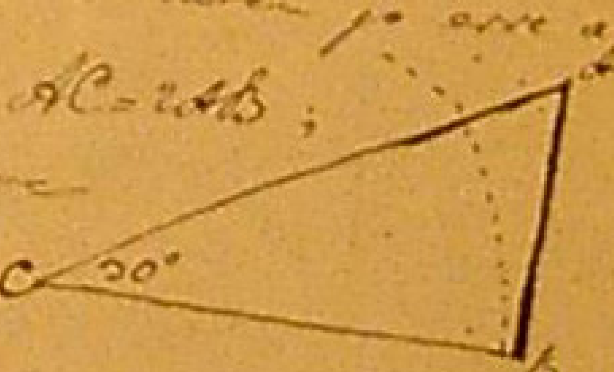
30, E sorral szerint pl a πt ki számíthatni; mert tudva van hogy

$\tan 45° = 1$; tehát $\text{arc } 45° = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \ldots\ldots$ s ebből folyólag

$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} \ldots\ldots$ de ez igen lassan összetartó. Ellenben jó erre a következő mód: ha $y = 30°$; $AB = \tan 30°$; $CB = 1$, $AC = 2AB$;

lévén $AC^2 = AB^2 + CB^2 = AB^2 + 1 = 4AB^2$; honnan kifejezve

$AB^2 = \frac{1}{3}$; tehát $AB = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30°$, tehát



$$y = \text{arc } 30° = \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3^3.3} + \frac{3^2\sqrt{3}}{3^5.5} - \frac{3^3\sqrt{3}}{3^7.7} + \ldots\ldots =$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3} - \frac{3}{3^3.3} + \frac{3^2}{3^5.5} - \frac{3^3}{3^7.7} \ldots\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^3} - \frac{1}{7.3^4} + \ldots\right)$$

vagy a tagokat páronként egyesítve veve $\sqrt{3}\left(\frac{2}{27} - \frac{1}{27} + \frac{21}{5.7.3^4} - \frac{5}{5.7.3^4} + \frac{33}{9.11.3^6} - \frac{9}{9.11.3^6} \ldots\right)$

összevonva $\sqrt{3}\left(\frac{8}{1.3.3^2} + \frac{16}{5.7.3^4} + \frac{24}{9.11.3^6} \ldots\ldots\right)$; ebből 8at ki vive $= 8\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3^2} + \frac{2}{5.7.3^4} + \frac{3}{9.11.3^6} \ldots\right)$

s tehát $\pi = 48\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3^2} + \frac{2}{5.7.3^4} + \frac{3}{9.11.3^6} \ldots\right)$ az utóbbiból igy 3at kivive lesz

K 30/34 $\pi = 16\sqrt{3}\left(\frac{1}{1.3.3} + \frac{2}{5.7.3^3} + \frac{3}{9.11.3^5} \ldots\ldots\right)$